**ՕԺԱՆԴԱԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԻՑ**

**Բանալի բառեր** - **արտագծած և ներգծած շրջանագծեր, արտաքին շոշափում, շառավիղ, պարագիծ, մակերես, ընդհանուր շոշափող:**



Գաղտնիք չէ, որ մաթեմատիկական կրթության գերակա նպատակը աշակերտների ինտելեկտուալ զարգացումն է, մտածողության այնպիսի որակների ձևավորումը, որոնք հատուկ են մաթեմատիկական գործունեությանը և անհրաժեշտ են մարդկանց հասարակության մեջ լիարժեք անդամ լինելու համար։ Այդ գործում շատ կարևոր դեր ունի երկրաչափության ուսուցումը դպրոցում։Երկրաչափությունը` որպես երկրաչա-փական պատկերներ ուսումնասիրող գիտություն, հարուստ է պատկերների գեղեցիկ և էֆեկտիվ համադրումներով ու հատկություններով։ Երկրաչափության դպրոցական դասընթացն ընդգրկում է մեծ քանակությամբ խնդիրներ, որոնք լուծվում են որոշակի ալգորիթմներով։

 

Օրինակ այն խնդիրները, որոնք ամրապնդում են բանաձևերի իմացությունը և զուտ հաշվողական բնույթի են, չեն կարող ապահովել սովորողների ստեղծագործական մտածողության զարգացումը։Իսկ ոչ ստանդարտ խնդիրը չի կարող լուծվել նախապես հայտնի ալգորիթմով, անհրաժեշտութուն է առաջանում սկսել լուծման որոնումը, որը և ենթադրում է մտածողության զարգացում։ Խնդրի լուծմամբ պայմանավորված մտածողության լարվածությունը և հայտնագործության բերկրանքը հադիսանում են ստեղծագործական ուսուցման զգայական գործոնները։



Աշակերտի մոտ հետաքրքրություն է առաջանում ինքնուրույն փնտրելու և գտնելու խնդրի լուծումը։ Դրա համար աշակերտը պետք է ունենա տեսական գիտելիքների հարուստ պաշար և կարողանա արդեն լուծված խնդիրներում հայտնաբերել կարևոր փաստեր և դրանք ընդհանրացնել։ Երկրաչափական փաստերը, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես թեորեմներ,անվերջ են: Դրանցից շատերը հանդես են գալիս երկրաչափության դասագրքերում որպես ապացույցի խնդիրներ: Վերջիններիս իմացությունը և կիրառումը մի շարք խնդիրների լուծում դարձնում է ավելի արդյունավետ և արագ: Դիտարկենք մի քանի այդպիսի օրինակներ:



**Խնդիր 1.Ապացուցել, որ արտաքին շոշափում ունեցող R1,R2,R3 շառավիղներով երեք շրջանագծերի շոշափման կետերով անցնող շրջանագծի շառավիղը՝**$r=\sqrt{\frac{R\_{1}R\_{2}R\_{3}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}}}$ **: [ 1; էջ 70 ]**

**Ապացույց:** Դիցուք A,B,C կետերը շոշափման կետեր են: Հետևաբար O1O2O3եռանկյան համար A, B, C կետերով անցնող շրջանագիծը համարվում է ներգծված:Որպես մի կետից տարված շոշափողների հատվածներ`OA=OB=OC, իսկ OA-ն,OB-ն,OC-ն ուղղահայաց են համապատասխանաբար O1O2,O2O3,O3O1 կողմերին(ըստ շրջանագծի շոշափողի հատկության),հետևաբար O կետը հավասարահեռ է O1O2O3 եռանկյան կողմերից և հանդիսանում է նրան ներգծած շրջանագծի կենտրոն:

O1O2=R1+R2 (1)

A

O2

O2O3=R2+R3(2)

O

C

B

O1

O3O1=R3+R1(3)

O3

Գումարելով (1),(2),(3 )հավասարությունները`կստանանք$ P\_{O\_{1}O\_{2}O\_{3}}$= 2R1+2R2+2R3: Նկատենք, որ P=R1+R2+R3 (կիսապարագիծ): Օգտվելով եռանկյան մակերեսի Հերոնի բանաձևից՝կստանանք`$S\_{O\_{1}O\_{2}O\_{3}}$=$\sqrt{P∙R\_{1}R\_{2}R\_{3 }}$=$\sqrt{(R\_{1}+R\_{2}+R\_{3})R\_{1}R\_{2}R\_{3}}$:

Ըստ եռանկյան մակերեսի S=Pr բանաձևի`

r =$\frac{S}{ P}$=$\sqrt{\frac{R\_{1}R\_{2}R\_{3}(R\_{1}+R\_{2}+R\_{3})}{(R\_{1}+R\_{2}+R\_{3})^{2}}}$=$\sqrt{\frac{R\_{1}R\_{2}R\_{3}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}}}$

Այսպիսով`**r=**$\sqrt{\frac{R\_{1}R\_{2}R\_{3}}{R\_{1}+R\_{2}+R\_{3}}}$ **:**

**Խնդիր2. Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից ներքնաձիգին տարված բարձրությունը եռանկյունը տրոհում է երկու ուղղանկյուն եռանկյունների, որոնց համար տեղի ունեն.**

**1.P2=P1 2 +P2 2 2. r2= r12 + r22 3. R2 = R21 + R22**

(P,P1,P2-ը համապատասխանաբար ABC,ACH,BCH եռանկյունների պարագծերն են, r,r1,r2-ը՝ ներգծած շրջանագծերի ,R,R1,R2-ը՝ արտագծած շրջանագծերի շառավիղները)

**4.O1O2 = r**$\sqrt{2}$ (Օ1,Օ2-ը համապատասխանաբար ACH և BCH եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի կենտրոններն են)

 **5.O3O4=R** (Օ3,Օ4-ը համապատասխանաբար ACH և BCH եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի կենտրոններն են) [ 2; էջ 30 ]

A

**Ապացույց:**

B

P1=PACH P2=PBCH P= PABC

$$∙$$

H

O1

 SACH = S1 SBCH = S2  SABC = S

Օ3

$$∙$$

O2

r1 =rACHr2 =rBCHr = rABC

$$∙$$

C

B

S = S1 + S2

Օ4

Pr =P1r1+P2r2 (1) հավասարությաներկուկողմըբաժանենքr-ի,կստանանք՝P=P1∙$\frac{r\_{1}}{r}$++P2$∙ \frac{r\_{2}}{r} ը$ստ եռանկյուններինմանության`$\frac{r\_{1}}{r}=\frac{p\_{1}}{p}=k \left(2\right) , \frac{r\_{2}}{r}=\frac{p\_{2}}{p}=k\left(3\right) , $ապաP=P1$∙\frac{P\_{1}}{P} +$P2$∙\frac{P\_{2}}{P}$: Հավասարման երկուկողմը բազմապատկենքP-ով:Կստանանք հետևյալ հավասարությունը`**P2 = P21 + P22:**Այժմ(1)հավասարության երկու կողմը բաժանենք p-ի՝ կստանանք r= $\frac{P\_{1}}{P} ∙r\_{1}$+$\frac{P\_{2}}{P}∙r\_{2 }։$ Ըստ ( 2) և (3) հավասարությունների՝$r=\frac{r\_{1}^{2}}{r}+\frac{r\_{2}^{2}}{r}$:Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկենք r-ով, կստանանք՝r2 = r12+ r22։ Իսկ այժմ գտնենք O1O2 հեռավորությունը:$ HO\_{1}=r\_{1}\sqrt{2}, HO\_{2}=r\_{2}\sqrt{2},$

Ուղղ. եռանկյուն$ O\_{1}O\_{2}H$**–**ից՝

$O\_{1}O\_{2}=\sqrt{2\left(r\_{1}^{2}+r\_{2}^{2}\right)}$**=**$\sqrt{2 r^{2}}$ **=**$ =r\sqrt{2}$

Այսպիսով$` O\_{1}O\_{2}=r\sqrt{2}$**:**

AC=2R1 , BC=2R2, AB=2R: ԸստՊյութագորասի թեորեմի`

A

H

AB2=AC2+BC2, ուրեմն`4R2=4R2+4R2: Երկու կողմը բաժա-

O3

նելով 4-ի՝ կստանանք` **R2=R21+R22 :**Քանի որ AB = 2R, իսկ

որպես եռանկյան միջին գիծ՝ O3O4$=\frac{AB}{2}$ , ապա**O3O4=R:**

O4

C

B

**Խնդիր 3. Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյանը արտագծած շրջանագիծը եռանկյան գագաթներով տրոհվում է երեք աղեղների, որոնց միջնակետերով անցնող եռանկյան մակերեսը հավասար է տրված ուղղանկյուն եռանկյան կիսապարագծի և շրջանագծի շառավղի արտադրյալի կեսին։[ 3 ; էջ 197 ]**

**Ապացույց:**$ ‹ A=α , ‹ B=β, ‹ MOP=90°, $

K

A

$ ‹ MOK=90°+β, ‹ POK=90°+α: $

M

Նշանակենք AC = b, AB = c, BC =a, իսկ արտագծած

O

 շրջանագծի շառավիղը նշանակենք R- ով։Օգտվելով

C

B

 եռանկյան մակերեսի բանաձևից՝ ստանանք MKP

P

 եռանկյան մակերեսը:

$$ S\_{MKP}=\frac{1}{2}R^{2}+\frac{1}{2}R^{2}\sin(\left(90°+α\right)+\frac{1}{2}R^{2}\sin(\left(90°+β\right))=\frac{1}{2}R^{2}\left(1+cosα+cosβ\right)==\frac{1}{2}R^{2}\left(1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)=\frac{1}{2}R^{2}\frac{c+b+a}{c}=\frac{1}{2}R^{2}\frac{P\_{ABC}}{c})=\frac{R^{2}∙P\_{ABC}}{2∙2R}=\frac{P\_{ABC}∙R}{4}$$

Այսպիսով՝ $S\_{MKP}=\frac{P\_{ABC}R}{4}=\frac{PR}{2} ,$ որտեղ P-ն ABC եռանկյան կիսապարագիծն է:

**SMKP =**$\frac{PR}{2}$**:**

**Խնդիր 4․Ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծված է շրջանագիծ և միացված են շոշափ-**

**ման կետերը։ Ապացուցել, որ առաջացած եռանկյան մակերեսը հավասար է տրված**

**ուղղանկյուն եռանկյան կիսապարագծի և շրջանագծի շառավղի քառակուսու արտա-**

**դրյալը հարաբերած ներքնաձիգին։[ 4 ; էջ199 ]**

**Ապացույց։** Նշանակենք AB = c, AC = b, BC = a,

K

A

 OM = ON = OK = r,P= $\frac{P\_{ABC}}{2}$: Նկատենք, որ

M

‹ MOK =180$°-‹ A$, ‹ KON =180$°-‹ B, ‹ MON=90°:$ Հետևա-

O

բար կունենանք, sin(180$°-A)=$ sin A, sin(180$°$- B) = sinB:

C

N

B

Քանի որ SMKN=SMON+SMOK+SKON,ապա ըստ եռանկյան մակերեսի բանաձևի՝

$$ S\_{MKN}=\frac{1}{2}r^{2}+\frac{1}{2}r^{2}\sin(\left(180°-A\right)+\frac{1}{2}r^{2}\sin(\left(180°-B\right))=\frac{1}{2}r^{2}\left(1+\sin(A)+\sin(B)\right)==\frac{1}{2} r^{2}\left(1+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)=\frac{1}{2}r^{2}\frac{c+b+a}{c}=\frac{1}{2} r^{2}\frac{P\_{ABC}}{c})=\frac{r^{2}∙P\_{ABC}}{2∙c}=\frac{r^{2}P}{c}$$

Այսպիսով՝$S\_{MKN}=\frac{Pr^{2}}{c} ,$որտեղ P-ն ABC եռանկյանկիսապարագիծնէ: **SMKN=**$\frac{Pr^{2}}{c}$**:**

 **Գրականություն**

1.Երկրաչափություն 7, 8, 9-րդ դաս., Լ. Ս. Աթանասյան, Վ. Ֆ. Բուտուզով ,

Ս.Բ. Կադոմցև, Է. Հ.Պոզնյակ, Ի. Ի. Յուդինա : Երևան <<Զանգակ-97>>2006

2.Մաթեմատիկայի թեստային առաջադրանքների շտեմարան: Հեղ. խումբ՝ Ս.Ռաֆայելյան,Վ.Փիլիպոսյան,Գ.Միքայելյան,Օ.Միքայելյան,Վ.Ոսկանյան,

Կ. Առաքելյան,Ա. Սարգսյան, Ն. Պողոսյան, Բ. Փիլիպոսյան:

Երևան Րաբունի ՍՊԸ 2015:

3. Մաթեմատիկայի թեստեր ՀՌՀ-ի ընդունելության քննությունների համար:

 Երևան ՀՌՀ հրատարակչություն 2015:

 **ՕԺԱՆԴԱԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԱՐԹԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԻՑ**

**Սիլվա Ղազարյան**

**Նյութի հակիրճ ամփոփում**

Երկրաչափության դպրոցական դասընթացը ընդգրկում է մեծ քանակությամբ խնդիրներ, որոնք լուծվում են որոշակի ալգորիթմներով։ Օրինակ այն խնդիրները, որոնք ամրապնդում են բանաձևերի իմացությունը և զուտ հաշվողական բնույթի են, չեն կարող ապահովել սովորողների ստեղծագործական մտածողության զարգացումը։ Իսկ ոչ ստանդարտ խնդիրը չի կարող լուծվել նախապես հայտնի ալգորիթմով, անհրաժեշտութուն է առաջանում սկսել լուծման որոնումը, որը և ենթադրում է մտածողության զարգացում։ Աշակերտի մոտ հետաքրքրություն է առաջանում ինքնուրույն փնտրելու և գտնելու խնդրի լուծումը։ Դրա համար աշակերտը պետք է ունենա տեսական գիտելիքների հարուստ պաշար և կարողանա արդեն լուծված խնդիրներում հայտնաբերել կարևոր փաստեր և դրանք ընդհանրացնել։ Երկրաչափական փաստերը, որոնք կարելի է ձևակերպել որպես թեորեմներ,անվերջ են: Դրանցից շատերը հանդես են գալիս երկրաչափության դասագրքերում որպես ապացույցի խնդիրներ: Վերջիններիս իմացությունը և կիրա-ռումը մի շարք խնդիրների լուծում դարձնում է ավելի արդյունավետ և արագ:

**ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ**

**С. В. Казарян**

**Резюме**

В статье рассматриваются примеры практического применения дополнительных задач на уроках математики, где основное внимание уделяется умению решать задачи. Большинство из них решается по стандартным схемам, но есть и такие к которым универсальные подходы неприменимы, поэтому дополнительные задачи могут быть использованы при решении некоторых геометрических задач.

**SUPPLEMENTARY PROBLEMS IN PLANIMETRY**

 **S.V.Ghazaryan**

**Summary**

This article discusses cases/examples of additional problems used during Math classes where the main focus is put on the problem-solving ability of students. Majority of the problems are solved through standard algorithms, however, there areproblems that cannot be solved by a standard approach. Hence, additional problems can allow solving certain geometrical problems requiring nontraditional approach.

ՂազարյանՍիլվաՎարդգեսի – ԵրևանիԿարենԴեմիրճյանիանվանհ 139 ավագդպրոցիմաթեմատիկայիուսուցչուհի, ՄԿԱԳ տնօրենի տեղակալ։

էլ. հասցե՝ silva.seda24@mail.ru

Հեռ.՝055618050